

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

A M S T E R D A M

TOEGEPASTE WISKUNDE

Korte mededeling T.N. 19

Een stromingsprobleem

door

D.J. Hofsommer

december 1960

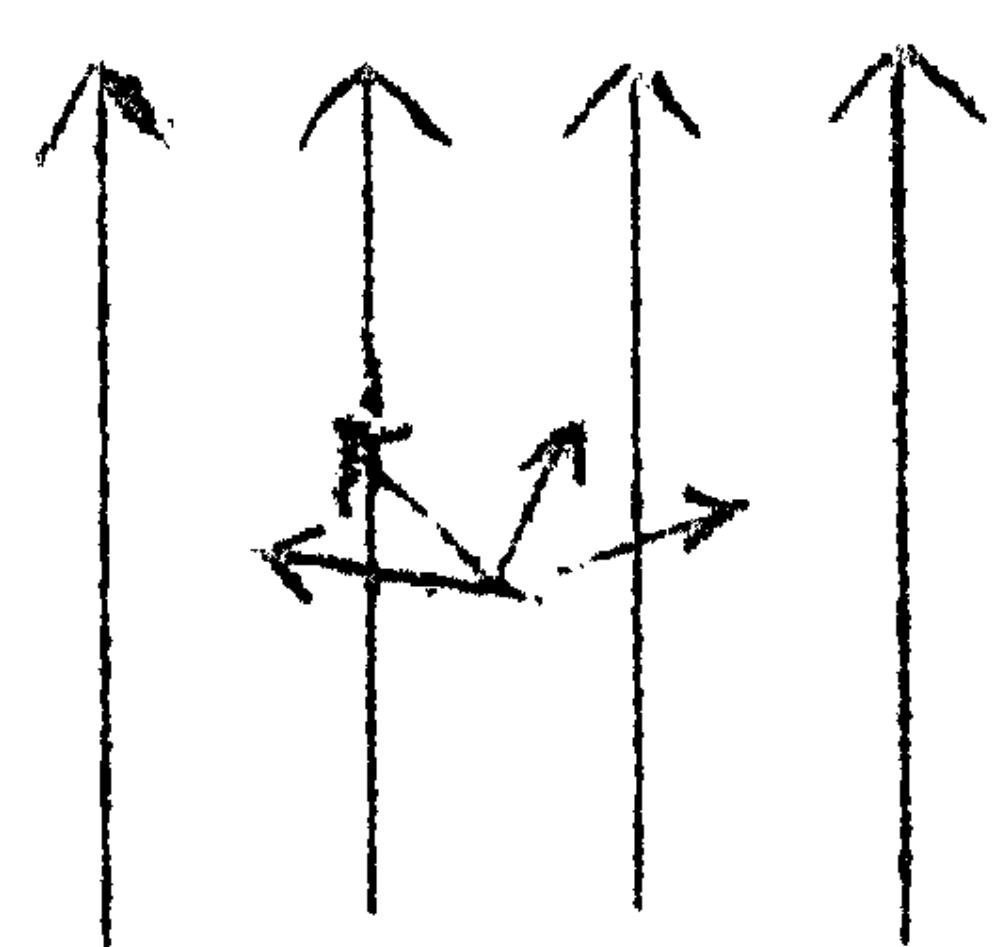


fig.1

In een uniforme parallelstroming bevindt zich een bron welke deeltjes uitzendt. Gevraagd wordt het aantal deeltjes dat zich in een stilstaand volume bevindt.

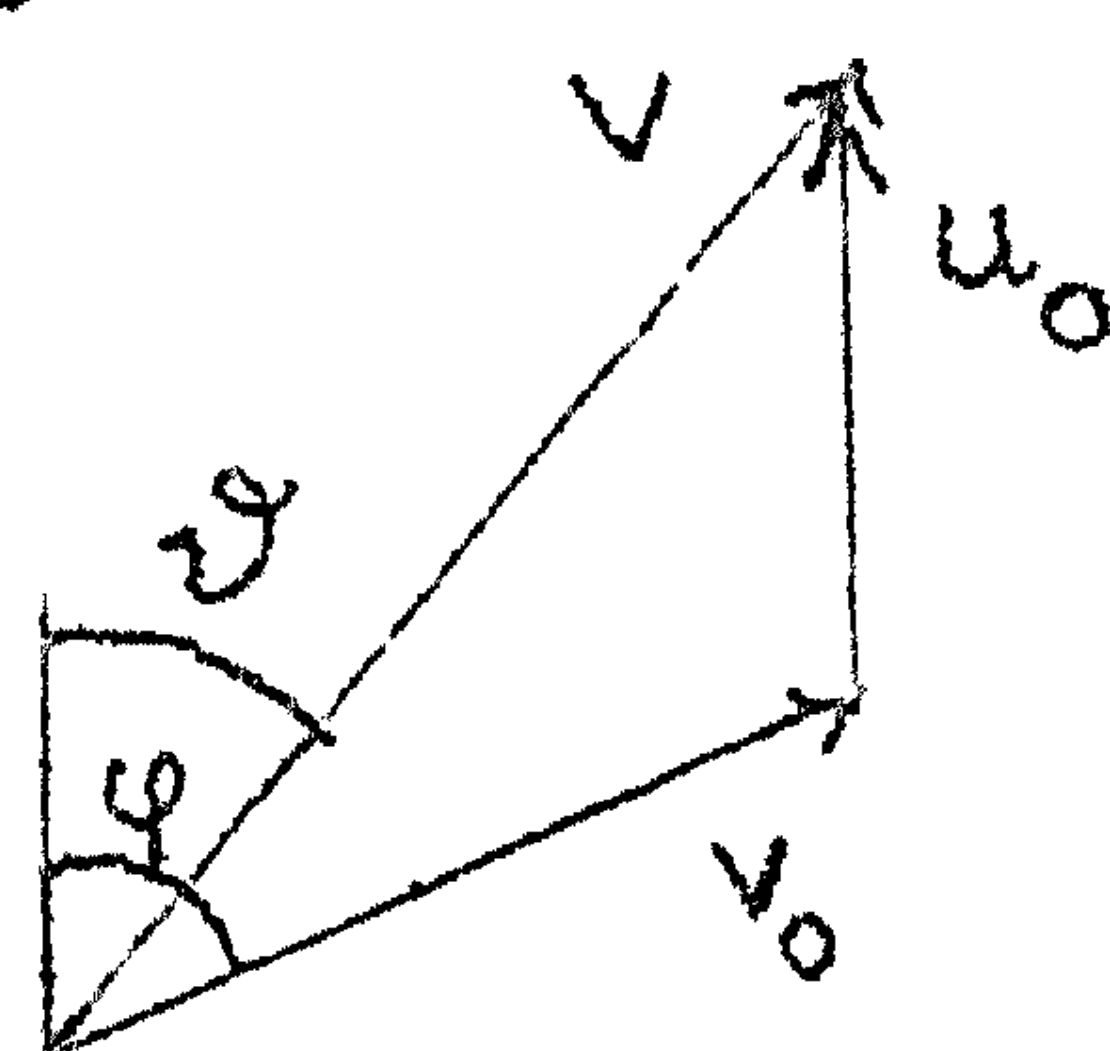


fig.2

van de parallelstroming zij $\vec{u}_0$. De component van de snelheid van de deeltjes in de richting van de parallelstroming is dan (fig.2)

$$1) v_{\parallel} = v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi + u_0$$

en de component loodrecht op die richting

$$2) v_{\perp} = v \sin \vartheta = v_0 \sin \varphi$$

als $\vec{v}$ de totale snelheid van de deeltjes is, ϑ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{u}_0$ en φ de hoek tussen $\vec{v}_0$ en $\vec{u}_0$.

Uit 1) en 2) volgen

$$3) v^2 = u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi$$

$$4) \cos \vartheta = \frac{v_{\parallel}}{v} = \frac{u_0 + v_0 \cos \varphi}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi}}.$$

Het aantal deeltjes, dat zich in een bolschillelement ter dikte dr , en met middelpunt in de deeltjesbron, bevindt is gelijk aan

$$\frac{q_0}{v} d\omega dr = \frac{q_0}{r^2 v} dV$$

waarin dV een volumeelement is. Het totaal aantal deeltjes in een gegeven volume bedraagt dus

$$5) I = \iiint \frac{q_0}{r^2 v} dV = \iiint \frac{q_0}{v} \sin \vartheta d\vartheta d\psi dr.$$

We beschouwen nu een rond deel van een bolschil symmetrisch t.o.v. de as $\vartheta=0$ met dikte h en begrensd door een kegel met halve openingshoek θ . Integratie over de polaire hoek ψ kan wegens de rotatiesymmetrie gemakkelijk worden uitgevoerd. Omdat q_0 en v onafhankelijk van r zijn, is integratie over r eveneens eenvoudig. We vinden

$$6) \quad I = 2\pi q_0 h \int_0^\theta \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi}} = 2\pi q_0 h \int_0^\theta \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{v}.$$

Uit (4) volgt, dat

$$7) \quad \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{v_0^2 \sin \varphi (v_0 + u_0 \cos \varphi)}{(u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

zodat

$$8) \quad I = 2\pi q_0 h v_0^2 \int_0^\theta \frac{\sin \varphi (v_0 + u_0 \cos \varphi) d\varphi}{(u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi)^2}$$

met

$$v_0 \cos \vartheta = -u_0 \sin^2 \theta + \cos \theta \sqrt{v_0^2 - u_0^2 \sin^2 \theta}.$$

Voer nu nog in

$$9) \quad v^2 = u_0^2 + v_0^2 + 2u_0 v_0 \cos \varphi$$

$$\sin \varphi \, d\varphi = -v \, dv / u_0 v_0$$

dan wordt 8)

$$10) \quad I = \frac{\pi q_0}{u_0} \int_{v_1}^{v_2} (v^2 + v_0^2 - u_0^2) v^{-3} dv$$

waarin

$$11a) \quad v_1 = u_0 \cos \theta + \sqrt{v_0^2 - u_0^2 \sin^2 \theta}$$

de totale snelheid in de richting θ is (zie fig.3) en

$$12) \quad v_2 = u_0 + v_0$$

de totale snelheid langs de as $\theta=0$ is.

Indien θ groot is, zullen er binnen een kegel met halve openingshoek θ richtingen vallen, waarin geen deeltjes worden uitgezonden. In dat geval wordt v_1 niet meer door (11a) gegeven. Veronderstellen we, dat θ ten hoogste $\frac{1}{2}\pi$ is, d.w.z. dat de bron alleen deeltjes in een halfruimte uitzendt, d.i. in een ruimtehoek 2π , dan wordt (zie fig.3)

$$11b) \quad v_1 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \quad \text{als} \quad \text{tg } \theta > v_0 / u_0.$$

Integratie van (10) levert

$$12) \quad I = \pi q_0 h / u_0 \left[\ln(v_2 / v_1) + \frac{1}{2} (u_0^2 - v_0^2) (v_2^{-2} - v_1^{-2}) \right].$$

De constante q_0 kan worden uitgedrukt in het totaal per sec uitgezonden aantal deeltjes Q . Immers, uit de gemaakte veronderstelling dat alleen deeltjes worden uitgezonden binnen een ruimtehoek 2π volgt onmiddellijk dat

$$13) \quad Q = 2\pi q_0.$$

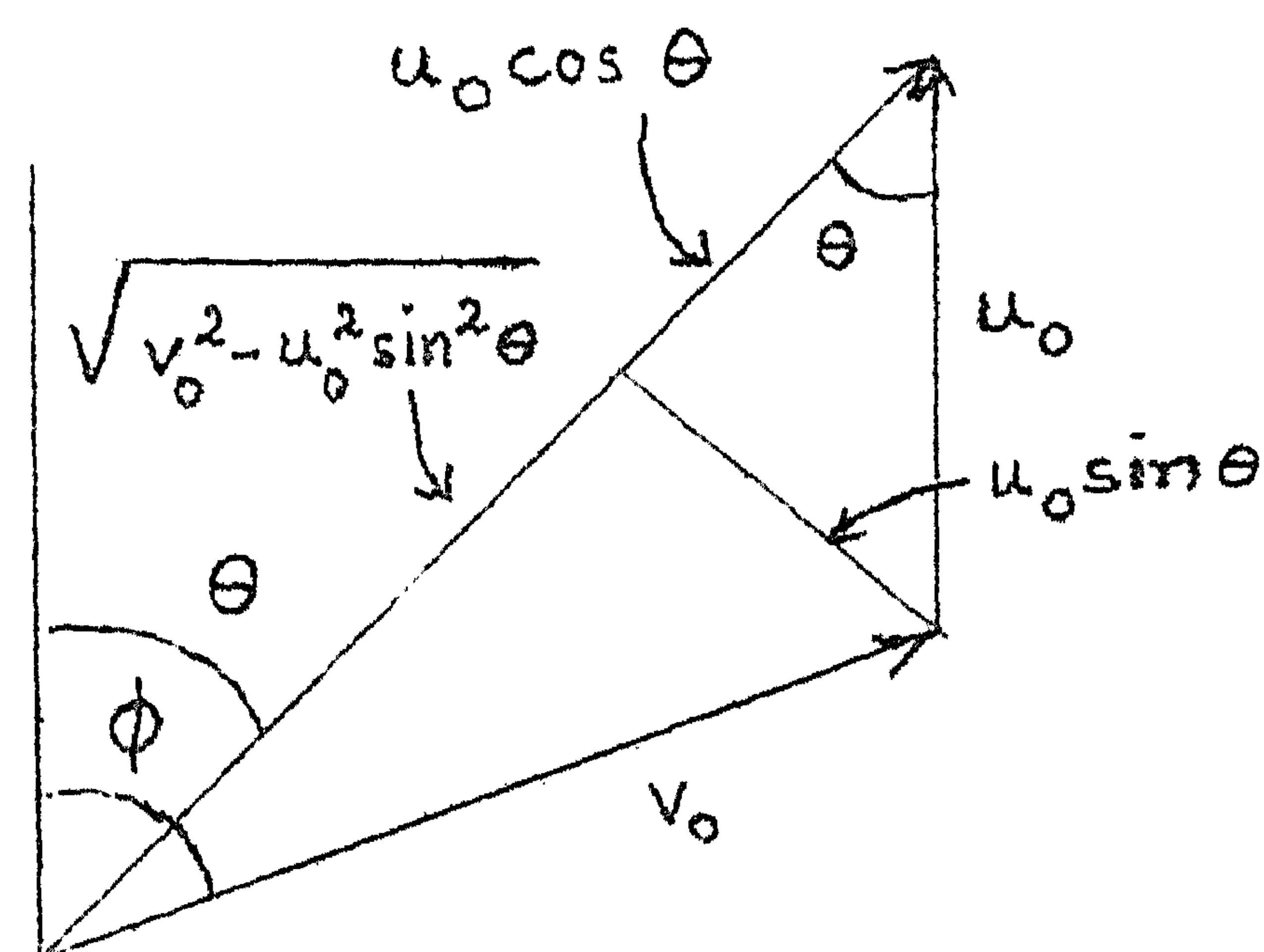


fig.3

Substitutie van 12) in 11) geeft tenslotte

$$14) \quad I = \frac{1}{2} Qh/u_0 \left[\ln(v_2/v_1) + \frac{1}{2}(u_0^2 - v_0^2)(v_2^{-2} - v_1^{-2}) \right].$$

Als tweede model nemen we het geval dat de uittreesnelheden van de deeltjes volgens een cosinuswet met de richting verandert, d.w.z. dat de uittreesnelheid w gelijk is aan

$$w = v_0 \cos \varphi$$

als φ de uittreerichting is.

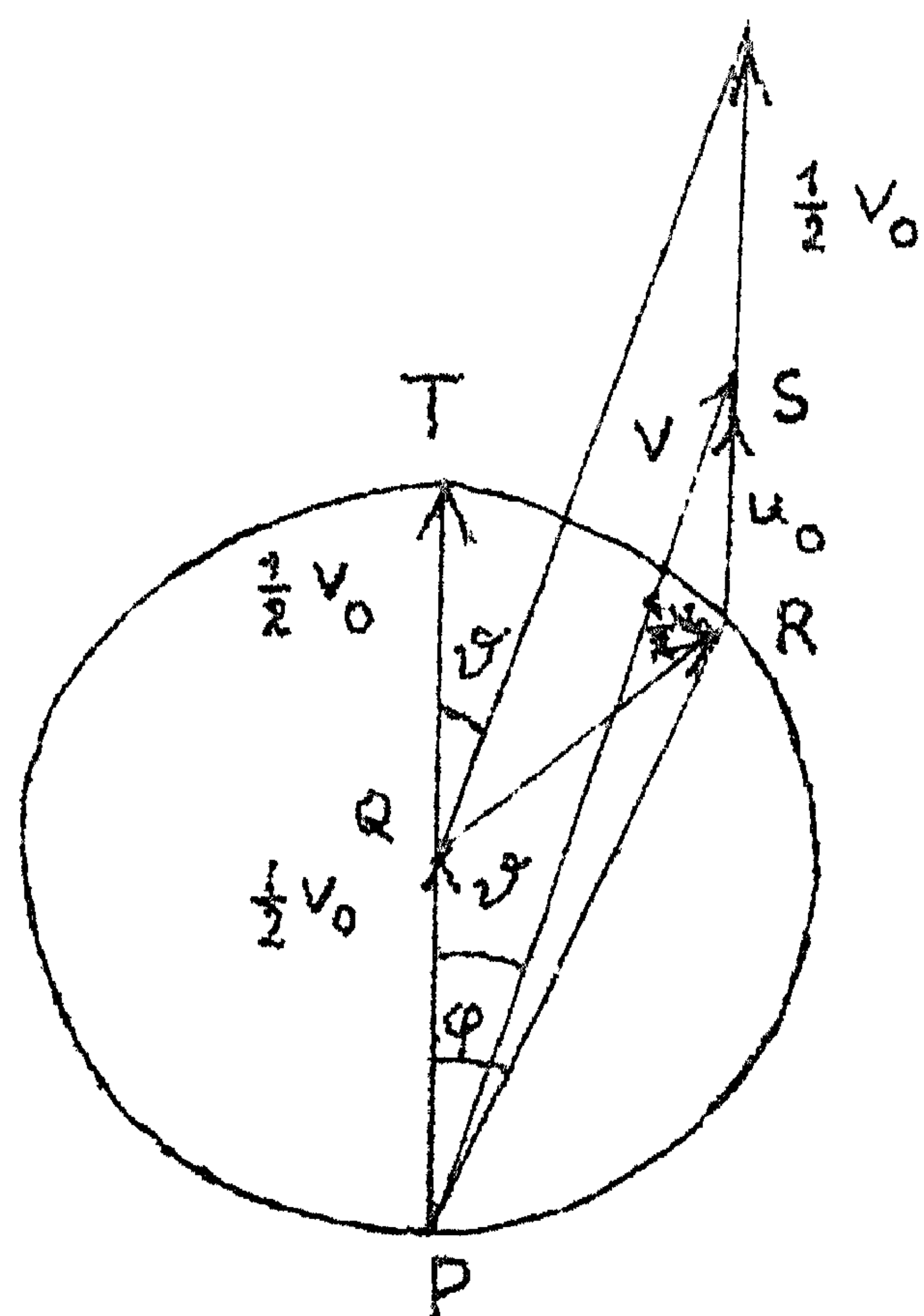


fig. 4

Het snelheidsdiagram is in fig. 4 aangegeven. PR is de uittreesnelheid, PT = v_0 de maximale uittreesnelheid. RS = u_0 de driftsnelheid en PS = v de totale snelheid. Uit de figuur blijkt dat we dezelfde totale snelheid verkrijgen als we een constante uittreesnelheid $\frac{1}{2}v_0$ nemen en een driftsnelheid $u_0 + \frac{1}{2}v_0$. Dit betekent, dat we de resultaten voor het tweede model uit die voor het eerste model kunnen ver-

krijgen indien we u_0 door $u_0 + \frac{1}{2}v_0$ en v_0 door $\frac{1}{2}v_0$ vervangen. We hebben dus

$$15) \quad I = \frac{Qh}{2u_0 + v_0} \left[\ln(v_2/v_1) + u_0(u_0 + v_0)(v_2^{-1} - v_1^{-2}) \right]$$

waarin

$$16) \quad v_1 = (u_0 + \frac{1}{2}v_0) \cos \theta + \sqrt{(\frac{1}{2}v_0)^2 - (u_0 + \frac{1}{2}v_0)^2 \sin^2 \theta}$$

weer de totale snelheid in de richting θ is en

$$17) \quad v_2 = u_0 + v_0$$

de totale snelheid langs de as is.

In dit geval is de richting van de totale snelheid aan geen beperkingen onderhevig.

Als derde model nemen we het geval, dat zowel de uittreesnelheden w als de aantallen van de deeltjes volgens een cosinuswet met de richting veranderen, d.w.z. dat

$$w = v_0 \cos \varphi$$

de uittreesnelheid is en dat

$$18) \quad qdw = q_0 \cos \varphi d\omega$$

het aantal deeltjes is, dat per sec in een ruimtehoekje $d\omega$ wordt uitgezonden.

Een redenering als voor het eerste model geeft de integraal

$$\begin{aligned}
 19) \quad I &= \pi q_0 h v_0^2 \int_0^\phi \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi [\frac{1}{2}v_0 + (u_0 + \frac{1}{2}v_0)\cos 2\varphi]}{[u_0^2 + u_0 v_0 + \frac{1}{2}v_0^2 + v_0(u_0 + \frac{1}{2}v_0)\cos 2\varphi]^2} d\varphi \\
 &= \pi q_0 h v_0^2 \int_0^\phi \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi [(2u_0 + v_0)\cos^2 \varphi - u_0]}{[u_0^2 + v_0(2u_0 + v_0)\cos^2 \varphi]^2} d\varphi \\
 &= \frac{2\pi q_0 h}{2u_0 + v_0} \left[I_0 - \frac{2u_0 + v_0}{u_0} I_1 + \frac{u_0 + v_0}{2u_0} I_2 \right]
 \end{aligned}$$

waarin

$$20) \quad \begin{cases} I_0 = \int_0^\phi \sin \varphi d\varphi = 1 - \cos \phi \\ I_1 = \int_0^\phi \frac{\sin \varphi d\varphi}{1 + a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a(1 - \cos \phi)}{1 + a^2 \cos^2 \phi} \\ I_2 = 2 \int_0^\phi \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + a^2 \cos^2 \varphi)^2} = \frac{1 - \cos \phi}{1 + a^2} \frac{1 - a^2 \cos \phi}{1 + a^2 \cos^2 \phi} + \\ \quad + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a(1 - \cos \phi)}{1 + a^2 \cos^2 \phi} \end{cases}$$

met

$$a^2 = \frac{(2u_0 + v_0)v_0}{u_0^2}$$

$$v_0 \cos 2\phi = -(u_0 + \frac{1}{2}v_0)\sin^2 \theta + \cos \theta \sqrt{(\frac{1}{2}v_0)^2 - (u_0 + \frac{1}{2}v_0)^2 \sin^2 \theta}$$

of

$$\begin{aligned}
 21) \quad \cos \phi &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2u_0 + v_0}{v_0} \sin \theta\right)(1 - \sin \theta)} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{2u_0 + v_0}{v_0} \sin \theta\right)(1 + \sin \theta)}
 \end{aligned}$$

als θ weer de halve openingshoek is van de kegel, die het beschouwde deel van een bolschil begrenst.

De constante q_0 kan weer worden uitgedrukt in het totaal per sec uitgezonden aantal deeltjes Q . We hebben

$$\begin{aligned}
 22) \quad Q &= \int q d\omega \\
 &= q_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\psi \\
 &= \pi q_0.
 \end{aligned}$$

Substitutie van 20, en 22) in 19) levert tenslotte

$$\begin{aligned}
 23) \quad I &= \frac{Qh}{u_0 + \frac{1}{2}v_0} \left[(1 - \cos \phi) \left(1 + \frac{\frac{1}{2}u_0}{u_0 + v_0} \frac{1 - a^2 \cos \phi}{1 + a^2 \cos^2 \phi}\right) - \frac{3u_0 + v_0}{2u_0 a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a(1 - \cos \phi)}{1 + a^2 \cos^2 \phi} \right] \\
 \text{met} \quad a &= \frac{1}{u_0} \sqrt{(2u_0 + v_0)v_0}
 \end{aligned}$$